
MEHR FOURIERTRANSFORMATION

Die Fouriertransformation ist aus vielen Gründen ein sehr leistungsfähiges Instrument in der Physik. So kann man mit ihrer Hilfe oft Differentialgleichungen leichter lösen.

[H23] *Coulomb-Potential* **[2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte]**

Berechnen Sie in Kugelkoordinaten die Fouriertransformierte des Coulomb-Potential $V(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{-e^2}{r}$, also

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{1}{4\pi}\frac{-e^2}{r}\,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Betrachten Sie zunächst ein allgemeines Zentralpotential $V(r) = V(|\vec{r}|)$ und zeigen Sie, dass dessen Fouriertransformierte nur von $k = |\vec{k}|$ abhängt. Wählen Sie dazu die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$ und drücken Sie das Skalarprodukt im Exponenten durch Kugelkoordinaten aus. Die φ-Integration ist einfach. Ebenso elementar lässt sich auch über $\cos\theta$ integrieren. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte in der Form

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int \mathrm{d}^3r\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,V(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{k}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\,\sin(kr)\,V(r)$$

geschrieben werden kann.

(b) Setzen Sie für $V(r)$ nun das Yukawa-Potential $V(r) = \frac{-e^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r}$ ein und führen Sie die r-Integration aus. Für die Fouriertransformierte sollten Sie $\tilde{V}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{-e^2}{4\pi}\frac{1}{k^2+m^2}$ erhalten.

(c) Führen Sie nun den Grenzwert $m \to 0$ durch, um die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials zu erhalten. Warum scheitert die direkte Berechnung wie in (b)?

(d) Betrachten Sie die Poisson-Gleichung $\Delta\frac{-e^2}{4\pi}\frac{1}{r} = e^2\delta(\vec{r})$. Wie lautet die Fouriertransformation dieser Gleichung? Finden Sie die Fouriertransformierte der Dirac'schen δ-Distribution und bestimmen Sie damit durch zweifache Integration der Poisson-Gleichung die Fouriertransformation des Coulomb-Potentials auf einfache Weise.

[H24] *Strahlung aus großer Entfernung* **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Von einem zunächst lokalisiertem Wellenpaket

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|}\left(a^*(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + a(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right)\Big|_{\omega=c|\vec{k}|}$$

erreicht einen Beobachter, der weit vom ursprünglichen Lokaliserungsgebiet entfernt ist, nur der Anteil mit Wellenvektor in Verbindungsrichtung, die als z-Achse gewählt werden kann. Daher tragen zum dortigen Feld nur Amplituden der Form

$$a(\vec{k}) = (2\pi)^3\, 2k_z\,\delta(k_x)\delta(k_y)\theta(k_z)b(k_z)$$

bei, wobei $b(k)$ eine nicht weiter eingeschränkte, beliebige Funktion ist.

(a) Zeigen Sie im Maßsystem mit $c = 1$, dass solch ein Wellenpaket die Form

$$\phi(t,\vec{x}) = h(t-z)\,,\quad h(t-z) = \int \mathrm{d}k\,\tilde{h}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-z)}\,,\quad \tilde{h}(k) = \begin{cases} b^*(k) & k>0 \\ b(-k) & k<0 \end{cases},$$

hat, also eine ebene Welle ist. die sich mit beliebig vorgegebener Form, also dispersionsfrei, mit Geschwindigkeit $c = 1$ in z-Richtung bewegt.

(b) Die allgemeine Lösung f der Wellengleichung $({\partial_t}^2 - {\partial_z}^2)f = 0$ in einer Zeit- und einer Raumdimension ist von der Form $f = h(t-z) + g(t+z)$. Zeigen Sie dies, indem Sie f als Funktion $f(t_-, t_+)$ der retardierten und avancierten Zeit $t_- = t - z$, $t_+ = t + z$. auffassen und $({\partial_t}^2 - {\partial_z}^2)f = 4\partial_-\partial_+ f$ herleiten. Was besagt dies für $\partial_+ f$, was besagt $\partial_+ f = G(t_+)$ für f ?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!